Kapitel XI.

Untermannigfaltigkeiten

§1. Elementare Eigenschaften und Beispiele

In der Linearen Algebra werden insbesondere lineare und affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$ betrachtet. In Analysis II haben wir unter Anderem stetig differenzierbare Kurven im $\mathbb{R}^n$ behandelt. Der Begriff einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert diese Beispielklassen.

(1.1) Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und stetig differenzierbare Funktionen

$$f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$$

gibt, so dass
(i) $M \cap U = \{x \in U;\ f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$,
(ii) $Rang\, Df(a) = n - k$ für $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})^t : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Statt Df schreiben wir auch

$$Df = (D_1 f, \ldots, D_n f) = \begin{pmatrix} (grad\, f_1)^t \\ \vdots \\ (grad\, f_{n-k})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix} =: \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Die Bedingung $Rang\,(Df)(a) = n - k$ bedeutet gerade, dass die $n - k$ auftretenden Gradienten $(grad\, f_1)(a), \ldots, (grad\, f_{n-k})(a)$ linear unabhängig sind.

(1.2) Beispiele. a) Aus formalen Gründen ist die leere Menge $\emptyset$ als k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ aufzufassen, mit beliebigem $k \geqslant 0$. Interessant sind aber nur nicht-leere Untermannigfaltigkeiten.

b) Jeder Punkt $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dazu sei $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = x_j - a_j$, $j = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\}, \quad Df = E.$$

c) Sei $E_k := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ die k-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$. Mit $f_j(x) = x_{k+j}, j = 1, \dots, n-k$, hat man

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}, \quad Df = \big(0, E^{(n-k)}\big) \in \mathbb{R}^{(n-k)\times n}.$$

Also ist E_k eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

d) Allgemeiner: Jeder k-dimensionale affine Unterraum Y des $\mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Denn es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n-k)\times n}$ mit Rang $n-k$ und ein $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ derart, dass

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax - b = 0\}.$$

Liest man die definierende Gleichung zeilenweise, so ist (i) aus (1.1) erfüllt. Wegen $Df(x) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt auch stets die Rangbedingung.

e) Sei f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2$. Dann ist $M := \{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit: Zwar ist die Rangbedingung aus (1.1) (ii) für f nicht erfüllt, denn mit $Df(x) = (2x_1, 0)$ gilt $Df(x) = (0,0)$ für alle a mit $f(a) = 0$. Setzt man aber $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1$, so ist $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$ und die Rangbedingung gilt für g. In Definition (1.1) geht es um die Menge und nicht primär um definierende Funktionen!

f) Wir betrachten die Einheitssphäre

$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Für $f(x) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ gilt

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\}.$$

Wegen $\mathit{grad}\, f = 2x \neq 0$ für alle $x \in S_{n-1}$ ist S_{n-1} eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

g) Kegel: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Dann ist der "Kegel ohne Spitze"

$$M_1 = \{a \in \mathbb{R}^3;\ f(a) = 0 \text{ und } a_3 > 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit. In den Bezeichnungen von (1.1) kann man $U = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_3 > 0\}$ wählen; die restlichen Bedingungen sind dann offensichtlich. Der "Doppelkegel"

$$M_2 = \{a \in \mathbb{R}^3;\ f(a) = 0\}$$

ist keine Untermannigfaltigkeit: Probleme bereitet $0 \in M_2$ mit $Df(0) = (0,0,0)$. Im Hinblick auf Beispiel e) ist diese Beobachtung allein aber nicht stichhaltig. Wir werden weiter unten darauf zurück kommen.

h) Ein Torus: Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$, und

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\right)^2 + x_3^2 - r^2.$$

Durch $f = 0$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ gegeben, wie man nachrechnet.
Man kann sie sich wie folgt veranschaulichen: Der Durchschnitt von M mit der Ebene $x_2 = 0$ ist die Vereinigung zweier Kreise in der (x_1, x_3)-Ebene mit Mittelpunkten $(R, 0)$ bzw. $(-R, 0)$ und Radius r. Man erhält M daraus durch Drehen um die x_3-Achse. Diese Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist von hoher Alltagsrelevanz (Fahrradschlauch, Donut, ...).

i) Noch ein Torus: Seien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$ sowie

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - r_1^2, \\ f_2 &: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_3^2 + x_4^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4;\ f_1(x) = f_2(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$.

j) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x_1 + \sin x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dann ist

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2;\ f(x) = 0\}$$

nicht-leer (es gilt z. B. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \in M$) und eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Denn aus $a \in \mathbb{R}^2$ und $(0,0) = Df(a) = (\cos a_1, \cos a_2)$ folgt $\sin a_1 \in \{1, -1\}$ und $\sin a_2 \in \{1, -1\}$, also $f(a) \neq 0$.

k) Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ist $M \cap V$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dies ergibt sich direkt aus Definition (1.1).

l) Graphen stetig differenzierbarer Funktionen: Sei $\emptyset \neq W \subset \mathbb{R}^m$ offen und $h : W \to \mathbb{R}^l$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist der *Graph*

$$G_h = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+l};\ x' \in W,\ x'' \in \mathbb{R}^l,\ x'' = h(x') \right\}$$

eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+l}$. Denn setzt man

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_l \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad x'' = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{m+l} \end{pmatrix},$$

so sind mit $U = W \times \mathbb{R}^l$ und

$$f_k(x) = x_{m+k} - h_k(x_1 \ldots, x_m) \quad (1 \leqslant k \leqslant l)$$

die Bedingungen aus (1.1) erfüllt. Man beachte, dass

$$Df_k(x) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & 0 \\ * & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

maximalen Rang hat.

Lokal kann man jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit als Graph einer Funktion von k Variablen darstellen.

(1.3) Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in M$. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten gibt es offene Umgebungen*

$$U' \subset \mathbb{R}^k \quad \text{von} \quad a' = (a_1, \dots, a_k)^t \quad \text{und} \quad U'' \subset \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{von} \quad a'' = (a_{k+1}, \dots, a_n)^t$$

sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$, so dass

$$M \cap (U' \times U'') = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \in U' \times U'';\ x'' = g(x') \right\}.$$

Beweis. Nach (1.1) existiert eine offene Umgebung U von a und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit

$$M \cap U = \{x \in U;\ f(x) = 0\}, \quad Rang\,(Df)(a) = n - k.$$

Also gibt es $1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-k} \leq n$ mit

$$\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})}(a) \neq 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionaldeterminante dürfen wir nach eventueller Verkleinerung von U gleich

$$\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-k}})}(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in U$$

annehmen. Nach eventueller Umnummerierung sei $(i_1, \dots, i_{n-k}) = (k + 1, \dots, n)$.
Nun wenden wir den Satz über implizite Funktionen IX(5.5) an und erhalten offene Umgebungen U' von a' und U'' von a'' mit $U' \times U'' \subset U$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$ mit der Eigenschaft

$$M \cap (U' \times U'') = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \in U' \times U'';\ x'' = g(x') \right\}.$$

□

Wir illustrieren den Satz durch die folgenden

(1.4) Beispiele. a) Sei $a \in S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_2 = 1\}$ mit $a_n > 0$. Dann setzt man

$$U' := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1};\ \|x'\|_2 < 1\},\ g : U' \to \mathbb{R}_+^*,\ x' \mapsto \sqrt{1 - \|x'\|_2^2},$$

damit

$$a \in S_{n-1} \cap (U' \times \mathbb{R}_+^*) = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ x_n \end{pmatrix} \in U' \times \mathbb{R}_+^*;\ x_n = g(x') \right\}.$$

Ist $a_n < 0$, so betrachte man $-g$. Ist $a_n = 0$, so wähle man eine Koordinate mit $a_m \neq 0$.

b) $M = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1^5 + x_1x_2 + x_2^5 - 1 = 0\}$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, wie man einfach nachprüft, und es gilt z. B. $(1, 0) \in M$. Eine explizite Formel zur Auflösung der definierenden Gleichung nach x_1 oder x_2 (analog zum ersten Beispiel) existiert aber nicht, wie in der Algebra bewiesen wird. Satz (1.3) ist gerade für solche Situationen wertvoll.

c) Der Doppelkegel M_2 aus Beispiel (1.2) g) ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Andernfalls müsste nach (1.3) in einer Umgebung von 0 eine eindeutige Darstellung als Graph einer Funktion der Gestalt

$$x_3 = g_3(x_1, x_2) \quad \text{oder} \quad x_2 = g_2(x_1, x_3) \quad \text{oder} \quad x_1 = g_1(x_2, x_3)$$

existieren. Dies ist nicht der Fall: Zum Beispiel existieren in jeder Nullumgebung in M_2 Punkte der Gestalt $(\rho, 0, \rho)$ und $(\rho, 0, -\rho)$ mit $\rho > 0$. Eine eindeutige Auflösung der Gestalt $x_3 = g_3(x_1, x_2)$ existiert somit nicht.

Wir wollen noch eine weitere (lokale) Darstellung von Untermannigfaltigkeiten einführen, die (1.3) verallgemeinert. Sie sollte auch an die Parameterdarstellung affiner Unterräume und an die Parameterdarstellung glatter Kurven erinnern.

Wir benötigen dazu einen neuen Begriff:

(1.5) Definition. Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $k \leq n$. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion*, wenn *Rang* $D\varphi(t) = k$ für alle $t \in T$.

Man beachte, dass wegen $D\varphi \in M(n \times k; \mathbb{R})$ stets *Rang* $D\varphi \leq \min\{k, n\}$ gilt.

(1.6) Beispiele. a) Es sei $0 < k \leqslant n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit Rang $A = k$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto A \cdot t + b$$

eine Immersion.

b) Kurven: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Falls $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, ist γ eine Immersion.

c) Sei $\Omega = \mathbb{R} \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad (t_1,t_2) \mapsto (\cos t_1 \sin t_2, \sin t_1 \sin t_2, \cos t_2)^t,$$
$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(t_1,t_2)} = \begin{pmatrix} -\sin t_1 \sin t_2 & \cos t_1 \cos t_2 \\ \cos t_1 \sin t_2 & \sin t_1 \cos t_2 \\ 0 & -\sin t_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man $Rang(D\varphi)(t) = 2$ für jedes $t \in \Omega$. Also ist φ eine Immersion mit

$$\varphi(\Omega) = S_2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

d) Es sei $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto \alpha_k$, eine bijektive Abbildung. Betrachte $T = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t-k \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad \text{für} \quad k < t < k+1.$$

φ ist offensichtlich eine Immersion mit

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

Das Bild von φ ist die Menge $(0,1) \times \mathbb{Q}$.
e) Es sei $\omega \in \mathbb{R}^*$. Die Abbildung

$$\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix},$$

ist offensichtlich eine Immersion; ihr Bild liegt im Torus

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4;\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,\ x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0\};$$

vgl. Beispiel (1.2) (i). Die Abbildung ϑ ist genau dann injektiv, wenn ω irrational ist.

Lokal erhält man aus Immersionen Untermannigfaltigkeiten:

(1.7) Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $k \leq n$ und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann existiert zu jedem $a \in \Omega$ eine offene Umgebung $T \subset \Omega$, so dass $\varphi(T)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis. Wegen $Rang(D\varphi)(a) = k$ kann man nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$

$$Rang\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(a) = k \quad \text{für} \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^t$$

annehmen. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung IX(5.2) existiert eine offene Umgebung $T \subset \Omega \subset \mathbb{R}^k$ von a und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$, so dass

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_k)^t : T \to V$$

eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung $\psi : V \to T$, $x \mapsto \psi(x)$, besitzt. Betrachte

$$\varphi \circ \psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ h_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ h_{n-k}(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix},$$

wobei $h_l(x_1, \dots, x_k) = \varphi_{k+l}(\psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_k))$ stetig differenzierbar ist. Mit Beispiel (1.2) l) ist $\varphi(T) = \varphi \circ \psi(V)$ der Graph der stetig differenzierbaren Funktion h, also Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. □

Global ist die Aussage von (1.7) nicht richtig:

(1.8) Beispiele. a) Betrachte Beispiel (1.6) d). Das Bild $B = (0, 1) \times \mathbb{Q}$ von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$: In jeder Umgebung von

$$(t^* - k, \alpha_k) \quad \text{mit} \quad t^* \in (k, k+1)$$

gibt es ein $(t^* - k, \alpha_l)$ mit $l \neq k$. Also gibt es keine Umgebung V von $(t^* - k, \alpha_k)$ derart, dass $B \cap V$ der Graph einer Funktion $x_2 = h(x_1)$ ist. Die Möglichkeit $x_1 = h(x_2)$ lässt sich ausschließen, weil B nur Punkte mit rationaler zweiter Koordinate enthält.

b) Betrachte Beispiel (1.6) e) mit irrationalem ω und setze $N := \vartheta(\mathbb{R})$. Man kann zeigen, dass der Abschluss von N in $\mathbb{R}^k$ gleich dem Torus M ist; die Spur der Kurve ϑ liegt also dicht in der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit M. Analog zu a) lässt sich hiermit zeigen, dass N keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ ist. Details werden wir nicht ausführen.

Intuitiv hat man die Vorstellung, dass eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit zunächst lokal wie eine "verbogene offene Teilmenge" des $\mathbb{R}^k$ aussieht. Um diese Vorstellung zu präzisieren, benötigen wir ein paar topologische Begriffe.

(1.9) Definition. a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir nennen $A \subset M$ *relativ offen* (bzw. *relativ abgeschlossen*) bezüglich M, wenn es eine offene (bzw. abgeschlossene) Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $A = M \cap U$.

b) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ und $K \subset \mathbb{R}^k$, so heißt eine Abbildung $\varphi : M \to K$ ein *Homöomorphismus*, wenn φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} relativ offene Mengen bezüglich M bzw. K auf relativ offene Mengen bezüglich K bzw. M abbilden.

(1.10) Beispiele. a) Die Menge $A := [0, 1)$ ist relativ abgeschlossen in $M_1 := (-\infty, 1)$ wegen $A = M_1 \cap [0, \infty)$ und relativ offen in $M_2 := [0, \infty)$ wegen $A = M_2 \cap (-2, 1)$.

b) Es sei G_h der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung $h : W \to \mathbb{R}^l$; vgl. (1.2) l) für die Bezeichnungen. Dann ist G_h homöomorph zur offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^k$, und der Homöomorphismus ist durch die Abbildung

$$\varphi : W \to G_h, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix},$$

mit Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : G_h \to W, \quad \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \mapsto x',$$

gegeben.
Zum Nachweis der Homöomorphie-Eigenschaft sei zunächst $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $Y = V \cap W$ relativ offen in W, insbesondere offen in $\mathbb{R}^k$. Dann ist

$$\varphi(Y) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix};\ x \in V \cap W \right\} = G_h \cap (Y \times \mathbb{R}^l),$$

also Durchschnitt von G_h mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{k+l}$.
Umgekehrt sei $Z \subset G_h$ relativ offen, also $Z = G_h \cap U$ mit einer offenenTeilmenge $U \subset \mathbb{R}^{k+l}$. Zu $\binom{x'}{x''} \in Z$ gibt es ein $r_1 > 0$, so dass

$$\{y' \in \mathbb{R}^k;\ \|y' - x'\| < r_1\} \subset W,$$

und ein $r_2 > 0$, so dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} y' \\ x'' \end{pmatrix};\ \|y' - x'\| < r_2 \right\} \subset U.$$

Hier ist $\|\cdot\|$ irgendeine Norm in $\mathbb{R}^k$. Somit gilt

$$\{y' \in \mathbb{R}^k;\ \|y' - x'\| < \min\{r_1, r_2\}\} \subset \varphi^{-1}(G_h),$$

und $\varphi^{-1}(G_h)$ ist offen in $\mathbb{R}^k$ sowie relativ offen in W.

c) Das Intervall $M_1 = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ und der Kreis $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph. Denn wäre $\varphi : M_1 \to M_2$ ein Homöomorphismus, so hätte die (beschränkte) Folge $\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ einen Häufungspunkt z (Bolzano-Weierstraß), der wegen der Abgeschlossenheit von M_2 auch in M_2 liegt. In jeder relativ offenen Teilmenge von M_2, welche z enthält, liegen also unendlich viele Folgenglieder und das Gleiche gilt für jede (relativ) offenen Teilmenge von M_1, welche $\varphi^{-1}(z)$ enthält. Andererseits liegen für beliebiges $w \in (0,1)$ in der (relativ) offenen Teilmenge $(w/2, (1+w)/2) \subset M_1$ nur endlich viele Glieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; Widerspruch. (Eleganter geht es übrigens, wenn man Zusammenhangseigenschaften benutzt.)

Die intuitive Vorstellung von Untermannigfaltigkeiten lässt sich nun wie folgt in einem Satz formulieren:

(1.11) Satz. *Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U in $\mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$ und einen stetig differenzierbaren Homöomorphismus $\varphi : W \to U \cap M$.*

Beweis. Nach Satz (1.3) kann man annehmen, dass $U \cap M$ der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ist. Dann folgt die Aussage mit Beispiel (1.10) b). $\square$

Zu beachten ist hier, dass die Aussage von Satz (1.11) für Bilder von Immersionen im Allgemeinen nicht gilt. Dies zeigen die Beispiele aus (1.8).

Bemerkung: Das Argument im Beweis von (1.11) zeigt auch, dass es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung U gibt, so dass $M \cap U$ Bild einer Immersion ist.

Zum Abschluss dieses Paragrafen wollen wir noch den Begriff des Tangentialraums einführen. Er verallgemeinert den bekannten Begriff der Kurventangente und präzisiert den anschaulichen Begriff der Tangentialebene an eine Fläche (etwa eine Sphäre) im $\mathbb{R}^3$.

(1.12) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt a, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\psi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M,\ \psi(0) = a,\ \psi'(0) = v.$$

Die Menge T_aM aller Tangentialvektoren an M in a nennt man den *Tangentialraum* an M im Punkt a.

Der Veranschaulichung dienen die

(1.13) Beispiele. a) Für beliebiges M und $a \in M$ gilt $0 \in T_aM$, wie man mit der konstanten Abbildung $\varphi : (-1,1) \to M$, $t \mapsto a$, sieht.

b) Sei $M = E_k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ die k-dimensionale Ebene. Dann ist jeder Vektor $v \in E_k$ ein Tangentialvektor an M in a. Dazu betrachte man

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \tau \mapsto a + \tau v, \quad \psi(\mathbb{R}) \subset E_k, \quad \psi(0) = a, \quad \psi'(0) = v.$$

c) Sei $M = S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und $a = e_n$. Man betrachte für $1 \leq i < n$

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \tau \mapsto \sin\tau \cdot e_i + \cos\tau \cdot e_n, \quad \psi(\mathbb{R}) \subset S_{n-1}, \quad \psi(0) = e_n, \quad \psi'(0) = e_i.$$

Also ist jeder Einheitsvektor $e_1, \ldots, e_{n-1}$ ein Tangentialvektor an S_{n-1} in e_n.

Eine allgemeine Charakterisierung enthält der

(1.14) Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann gilt:*
a) T_aM ist ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
b) Sei $\varphi : \Omega \to V \subset M$ eine Immersion, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $V = \varphi(\Omega)$ relativ offen in M ist. Für $c \in \Omega$ mit $\varphi(c) = a$ bildet

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c)$$

eine Basis von T_aM.
c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und seien $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$M \cap U = \{x \in U;\ f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\},\ Rang \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = n - k.$$

Dann gilt

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^n;\ \langle v, (grad\, f_j)(a)\rangle = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n-k\}.$$

Beweis. Seien

$$T_1 := \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c) + \ldots + \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c), \quad T_2 := \{v \in \mathbb{R}^n;\ \langle v, (grad\, f_j)(a)\rangle = 0, j = 1, \ldots, n-k\}.$$

Wir zeigen $T_1 \subset T_a(M) \subset T_2$. Es gilt $Rang\, D\varphi = k$ nach (1.13) und (1.11), also $dim\, T_1 = k$. Andererseits gilt $Rang\, Df = n - k$ nach (1.4), also $dim\, T_2 = k$. Daraus würde dann $T_1 = T_2 = T_aM$ und die Tatsache folgen, dass T_aM ein k-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

(i) Sei $v \in T_1$, also $v = \nu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c) + \ldots + \nu_k \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c), \nu_j \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \tau \mapsto \varphi((c_1 + \tau\nu_1, \ldots, c_k + \tau\nu_k)^t),$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Es gilt $\psi(0) = \varphi(c) = a$ und nach der Kettenregel

$$\psi'(0) = \nu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(c) + \ldots + \nu_k \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(c) = v,$$

d. h. $v \in T_aM$ und damit $T_1 \subset T_aM$.

(ii) Sei nun $v \in T_aM$ und $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = v$. Wegen $\psi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$ existiert ein $0 < \delta < \varepsilon$ mit $f_j(\psi(\tau)) = 0$ für $|\tau| < \delta$ und $j = 1, \ldots, n-k$. Differentiation nach τ ergibt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\psi(0)) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial \tau}(0) = \langle (grad\, f_j)(a), \psi'(0) \rangle = \langle (grad\, f_j)(a), v \rangle,$$

also $v \in T_2$ und damit $T_aM \subset T_2$. □

Zu Veranschaulichung betrachten wir unsere Standardbeipiele.

(1.15) Beispiele. a) Betrachte nochmals $M = S_{n-1} = \{x;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^n$; und $a \in M$ beliebig. Nach (1.14) c) ist

$$\begin{aligned} T_aM &= \big\{v \in \mathbb{R}^n;\ \langle (2a_1, \ldots, 2a_n), v \rangle = 0\big\} \\ &= \big\{v \in \mathbb{R}^n;\ a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0\big\}. \end{aligned}$$

b) Sei M der Torus aus Beispiel (1.2) i). Für $a \in M$, also $a_1^2 + a_2^2 = r_1^2$ und $a_3^2 + a_4^2 = r_2^2$ liefert (1.14) c) die Charakterisierung

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^4;\ a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \ \text{ und } \ a_3v_3 + a_4v_4 = 0\}.$$

Schließlich kommt man vom Tangentialraum zum Normalenraum:

(1.16) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* von M im Punkt a, wenn v senkrecht auf T_aM steht, d. h. $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_aM$. Die Menge N_aM aller Normalenvektoren in a heißt *Normalenraum* an M im Punkt a.

Eine unmittelbare Folgerung aus (1.14) ist das

(1.17) Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* (1.13) *gilt:*
a) N_aM *ist ein* $(n-k)$*-dimensionaler Untervektorraum des* $\mathbb{R}^n$.
b) $N_aM = \{v \in \mathbb{R}^n;\ \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(c), v \rangle = 0$ *für* $j = 1, \ldots, k\}$.
c) $(grad\, f_1)(a), \ldots, (grad\, f_{n-k})(a)$ *ist eine Basis von* N_aM.

Zur Illustration besprechen wir die

(1.18) Beispiele. a) Für $M = S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in M$ gilt nach (1.17) c):

$$N_aM = \mathbb{R} \cdot a.$$

b) Für den Torus M aus Beispiel (1.2) i) (siehe auch Beispiel (1.15) b) und $a \in M$ bilden nach (1.17) c) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

eine Basis von N_aM.

Für eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ (ebene Kurven) sowie zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ (Flächen im Raum) gibt es standardisierte Festlegungen und Konstruktionen.

(1.19) Definition. Es sei $a = \binom{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann setzen wir

$$a^\perp := \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich gesehen entsteht $a^\perp$ aus a durch Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn (also in "mathematisch negativer Richtung"). Zu gegebenem $a \neq 0$ ist $a^\perp$ durch die Bedingungen

$$\langle a, x\rangle = 0; \quad \|a\| = \|x\|, \quad \det(a, x) < 0$$

eindeutig bestimmt.
Warnung: Diese Definition und Konvention gilt im Rahmen des vorliegenden Skripts. In der Literatur wird vielfach das Negative "unseres" $a^\perp$ festgelegt.

(1.20) Beispiel. Es sei M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, weiter $W \subset \mathbb{R}$ offen, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\gamma : W \to U \cap M$ wie in (1.11). Dann ist für jedes $t \in W$ durch $\gamma'(t)$ ein Basisvektor von $T_{\gamma(t)}M$ und durch $(\gamma'(t))^\perp$ ein Basisvektor von $N_{\gamma(t)}M$ gegeben.

Jetzt wollen wir den $\mathbb{R}^3$ behandeln.

(1.21) Definition. Für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist das *Vektorprodukt* definiert durch

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die wesentlichen Eigenschaften sind enthalten in dem

(1.22) Lemma. *Für alle $a, b, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:*
a) $\langle a \times b,\ z\rangle = \det(a, b, z)$.
b) $\langle a \times b,\ \alpha a + \beta b\rangle = 0$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
c) $a \times b = -b \times a$, *insbesondere* $a \times a = 0$.
d) $\|a \times b\|_2^2 = \det(a, b, a \times b) = \langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle - \langle a, b\rangle^2$.
e) $a \times b \neq 0$ *gilt genau dann, wenn* a, b *linear unabhängig sind.*

Beweis. a) Man entwickle $\det(a, b, z)$ nach der 3. Spalte.
b) $\langle a \times b, \alpha a + \beta b\rangle = \det(a, b, \alpha a + \beta b) = 0$, da die Spalten linear abhängig sind.
c) Das ist trivial.
d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|_2^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \|a\|_2^2 \cdot \|b\|_2^2 - \langle a, b\rangle^2.
\end{aligned}$$

e) Man verwende d) und die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung. □

Konkret erhalten wir damit das

(1.23) Beispiel. Sei nun $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\varphi : T \to M \cap U$ ein stetig differenzierbarer Homöomorphismus mit *Rang* $D\varphi(t) = 2$ für alle $t \in T$. Sei $\varphi = \varphi\binom{u}{v}$ mit

$$\varphi_u := \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \varphi_v := \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Wegen Rang $D\varphi = 2$ sind φ_u und φ_v linear unabhängig. Dann bilden für jedes $t \in T$ die Vektoren $\varphi_u(t)$ und $\varphi_v(t)$ eine Basis von $T_{\varphi(t)}M$ und $\varphi_u(t) \times \varphi_v(t)$ ist ein Basisvektor von $N_{\varphi(t)}M$.